

Champ de vecteurs en coordonnées cylindriques

Soit le champ suivant, en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{A} \begin{pmatrix} \frac{-y}{(x^2+y^2)} \\ \frac{x}{(x^2+y^2)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la divergence du champ \vec{A} . Que peut-on en conclure ?
2. Exprimer les vecteurs unitaires de la base des coordonnées cylindriques $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ dans la base de coordonnées cartésiennes $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$
3. Exprimer le champ \vec{A} dans les coordonnées cylindriques.
4. Donner une représentation graphique du champ \vec{A} .
5. Calculer la divergence du champ \vec{A} dans les coordonnées cylindriques.
6. En utilisant la représentation graphique, prédire la valeur du rotationnel de \vec{A} (nul/non-nul, sens du vecteur).
7. Calculer le rotationnel de \vec{A}

Le champ vectoriel \vec{A} est le seul champ orthoradial dont le rotationnel est égal à zéro.

Question bonus : D'après théorème de Green-Ostrogradsky la circulation d'un champ sur un contour fermé est égale à l'intégrale du rotationnel de ce champ sur la surface délimitée par ce contour :

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{rot}(\vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

- Calculer la circulation de \vec{A} sur un contour fermé circulaire.
- En déduire que $\vec{rot}(\vec{A})$ doit être nul en tout point de l'espace, sauf en 0.